

13. Soustavy lineárních rovnic a více neznámých

- 3 NEZNÁMÉ

- soustavu lib. počtu lineárn. rovnic převedeme na maticový tvar (1), (2), (3)

(1) 3 RCE PRO 3 NEZNÁMÉ

$$3x - y + 2z = 13$$

$$2y + z = 1$$

$$2z = 6$$

$$2z = 6 \quad 2y + z = 1 \quad 3x + 1 + 6 = 13$$

$$z = 3$$

$$2y = -2$$

$$3x = 6$$

$$y = -1$$

$$x = 2$$

$$K = \{ [2, -1, 3] \}$$

1 ŘEŠENÍ

(2) 2 RCE PRO 3 NEZNÁMÉ

$$x + 3y - z = 2$$

$$y + 3z = -2$$

[1 NEZNÁMOU VOLÍM A DALŠÍ DOPŮČ.]

$$\text{kv. } z \in \mathbb{R} \Rightarrow y = -2 - 3z$$

$$\text{a dopoč. } x = 2 - 3y + z$$

$$x = 2 - 3(-2 - 3z) + z$$

$$x = 2 + 6 + 9z + z$$

$$x = 8 + 10z$$

$$K = \{ [8 + 10z, -2 - 3z, z], z \in \mathbb{R} \}$$

NEKONEČNĚ MNOHO ŘEŠENÍ

(3) 1 RCE PRO 3 NEZNÁMÉ

$$a) 2x - y + 3z = 1$$

[VOLÍME 2 NEZNÁMÉ A TŘETÍ DOPŮČÁME]

kv. $x, y, z \in \mathbb{R}$ a x dopoč.

$$2x = 1 - 3z + y$$

$$x = \frac{1}{2}(1 - 3z + y)$$

$$x = \frac{1 - 3z + y}{2}$$

$$K = \{ [\frac{1 - 3z + y}{2}, y, z], y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R} \}$$

NEKONEČNĚ MNOHO ŘEŠENÍ

$$\left[\begin{array}{l} \text{kv. volím } x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow y = 2x + 3z - 1 \\ K = \{ [x, 2x + 3z - 1, z], x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R} \} \end{array} \right]$$

b) KDYBY

$$0x + y + 3z = 1$$

$\Rightarrow$ VŽDY volím $x \in \mathbb{R}$ (máme volbu a koeficientem 0) a další

- tedy $x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R} \Rightarrow y = 1 - 3z$

$$K = \{ [x, 1 - 3z, z], x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R} \}$$

POKUD ZÍSKÁME PŘI ÚPRAVÁCH RCI

$$a) 0x + 0y + 0z = d \quad (d \neq 0)$$

$$(0x + 0y + 0z = 4)$$

$\Rightarrow$ SOUSTAVA NEMÁ ŘEŠENÍ

$$K = \emptyset$$

$$b) 0x + 0y + 0z = 0$$

$\Rightarrow$ RCI LZE VYNECHAT

(sníží se počet rovnic)

! PŘI ŘEŠENÍ VYUŽÍVÁME STEJNĚ EKVIVALENTNÍ ÚPRAVY! SOUSTAV ROVNIC JAKO PRO 2 RCE 2 NEZNÁMÉ (č. 12)

- METODY ŘEŠENÍ: DOSAZOVACÍ, SČÍTACÍ, GAUSSOVA ELIMINACE (VYLUČOVACÍ)

- Gaussova elimin. metoda: podmíně převedení soustavy na kxx. TROJÚHELNÍKOVÝ TYP (ne 2. rovnici vyřadíme první maximální, a 3. rovnici první a druhou maximální)

- Kvalitativní popis: pomocí kv. rozšíření matic soustavy (a řádkových koeficientů a maximálních, na základě čísel a pořadí absolutní členy rovnic převedeme na matou maximální rovnic)

- POŘADÍ ROVNIC LZE VHODNĚ ZAHŮNOVAT

Příklady

① Řeš $n \times n \times n$

a) $-2y + x = 1$
 $2x + y - 2x = 5$
 $x + 2y - 4x = -14$

GAUSSOVA
ELIMINACE
konečné
řádky
konečné

$-2x + 2y - 4x = -14$ $1. (-2)$
 $-2y + x = 1$
 $2x + y - 2x = 5$ $2. x, 3. x$

$x + 2y - 4x = -14$
 $-2y + x = 1$ $1. (-3)$
 $-3y + 6x = 33$ $1. 2$

$x + 2y - 4x = -14$
 $-2y + x = 1$
 $9x = 63$

$9x = 63$ $-2y + 7 = 1$ $x = 4x - 2y - 14$
 $x = 7$ $2y = 6$ $x = 4 \cdot 7 - 2 \cdot 3 - 14$
 $y = 3$ $x = 28 - 6 - 14$

$x = 8$
 $\mathcal{K} = \{[8, 3, 7]\}$

- DOSAZOVACÍ

$-2y + x = 1 \Rightarrow x = 1 + 2y (*)$
 $2x + y - 2x = 5$
 $x + 2y - 4x = -14$

$2x + y - 2(1 + 2y) = 5$ $2. RCE$
 $x + 2y - 4(1 + 2y) = -14$ $2. NEZN.$

$2x + y - 2 - 4y = 5$
 $x + 2y - 4 - 8y = -14$

LZE
1. SČÍTACÍ
 $2x - 3y = 7$
 $x - 6y = -10 \Rightarrow x = -10 + 6y$
 $2(-10 + 6y) - 3y = 7$
 $-20 + 12y - 3y = 7$
 $9y = 27$
 $y = 3$
 $x = -10 + 6 \cdot 3$
 $x = -10 + 18$
 $x = 8$

$\mathcal{K} = \{[8, 3, 7]\}$

MATICOVÝ ZÁPIS

$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & | & 1 \\ 2 & 1 & -2 & | & 5 \\ 1 & 2 & -4 & | & -14 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2 & -4 & -4 & | & -14 \\ 0 & -2 & 1 & | & 1 \\ 2 & 1 & -2 & | & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} (-2) \\ (-2) \end{matrix}$

$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & | & -14 \\ 0 & -2 & 1 & | & 1 \\ 0 & -3 & 6 & | & 33 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} (-2) \\ (-2) \end{matrix}$

$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & | & -14 \\ 0 & -2 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 9 & | & 63 \end{pmatrix}$

$9x = 63$ dále stejně...
 $x = 7$

MATICOVÝ ZÁPIS JE PŘEHLEDNĚJŠÍ
 NEMUSÍME PSÁT OZN. PROMĚNNÝCH
 (POROVNEJ)

SČÍTACÍ

$2x - 3y = 7$
 $x - 6y = -10$ $1. (-2)$
 $2x - 3y = 7$
 $-2x + 12y = 20$ $\oplus$

$9y = 27$ $x - 6 \cdot 3 = -10$
 $y = 3$ $x = 8$

$x(*)$ $x = 1 + 2 \cdot 3$
 $x = 7$

② Řešit v $\mathbb{R}$

$$x + y - 2x = -2$$

$$2x + 2y + 3x = 3$$

$$5x + 5y + 4x = 4$$

GAUS. ELIM.

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & -4 & -2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} (-2) \cdot 1 \\ (-2) \cdot 2 \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} 1:7 \\ 1:6 \end{smallmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} 1:7 \\ 1:6 \end{smallmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{stejně}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2 RCE PRO 3 NEZNAMÉ

$$x = 1 \quad \text{volím } y \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow x = -2 + 2x - y$$

$$x = -2 + 2 - y$$

$$x = -y$$

$$X = \{[-y, y, 1], y \in \mathbb{R}\}$$

③ Řešit v $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$x + y - 2x = -2 \Rightarrow x = 2x - y - 2$$

$$2x + 2y + 3x = 3$$

$$5x + 5y + 4x = 1$$

$$2(2x - y - 2) + 2y + 3x = 3$$

$$5(2x - y - 2) + 5y + 4x = 1$$

$$4x - 2y - 4 + 2y + 3x = 3$$

$$10x - 5y - 10 + 5y + 4x = 1$$

$$7x = 7 \Rightarrow x = 1$$

$$14x = 11 \Rightarrow x = \frac{11}{14}$$

SPOR

$$X = \emptyset$$

POZOR!

NEJDE JEDNU ROVNICI
VÝNECHAT - NEJSOU STEJNÉ

DŮ

$$x + y - 2x = -2 \Rightarrow x = -2 + 2x - y (*)$$

$$2x + 2y + 3x = 3$$

$$5x + 5y + 4x = 4$$

$$2(-2 + 2x - y) + 2y + 3x = 3$$

$$5(-2 + 2x - y) + 5y + 4x = 4$$

$$-4 + 4x - 2y + 2y + 3x = 3$$

$$-10 + 10x - 5y + 5y + 4x = 4$$

$$0y + 4x = 7 \quad 1:7$$

$$0y + 14x = 14 \quad 1:14$$

$$\begin{cases} \text{JEDNO} \\ \text{LZE} \\ \text{VÝNECHAT} \end{cases} \begin{cases} 0y + x = 1 \Rightarrow x = 1 \\ 0y + x = 1 \end{cases}$$

$$\text{dos. do (*) } x = -2 + 2 \cdot 1 - y = -y \quad \text{VOLIM } y \in \mathbb{R}$$

$$X = \{[-y, y, 1]\}$$

DŮ

GAUS. ELIM.

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & -4 & -2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} (-2) \cdot 1 \\ (-2) \cdot 2 \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 14 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{1:7}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$14x = 11$$

$$x = \frac{11}{14}$$

$$7x = 7$$

$$x = 1$$

SPOR

$$0x + 0y + 0x = -3$$

nepl.

$$X = \emptyset$$

4) Řešit v $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

a) $\frac{x+1}{y+1} = 2 \quad | \cdot (y+1) \quad [y \neq -1, x \neq -1]$

$\frac{y+2}{x+1} = 4 \quad | \cdot (x+1) \quad \text{ODSTRANÍME ZLOMKY}$
 URČÍME PODMÍNKY

$\frac{x+3}{x+1} = \frac{1}{2} \quad | \cdot 2(x+1)$

$x+1 = 2(y+1)$

$y+2 = 4(x+1)$

$2(x+3) = 1(x+1)$

$x+1 = 2y+2$

$y+2 = 4x+4$

$2x+6 = x+1$

$x-2y = 1 \quad (1. \text{ řádek}) \text{ GAUS. ELIMIN.}$

$y-4x = 2$

$-x + 2x = -5$

$x-2y = 1$

$y-4x = 2$

$-2y+2x = -4 \quad (1) + (3)$

$x-2y = 1$

$y-4x = 2$

$-y+x = -2$

$x-2y = 1$

$y-4x = 2$

$-3x = 0 \quad (2) + (3)$

$-3x = 0 \quad y = 2+4x \quad x = 1+2y$

$x = 0 \quad y = 2$

$x = 1+4$

$x = 5$

$\mathcal{K} = \{[5, 2, 0]\}$

b) $\frac{3x+y}{x+1} = 2$

ODSTRANÍME ZLOMKY
 $\frac{3x+y}{x+1} = 2$

$\frac{3x+x}{y+1} = 2$

$[\mathcal{K} = \{[4, 1, 3]\}]$

ČLENY S NEZNÁMÝMI NA JEDNU STRANU

ABSOLUTNÍ ČLENY (ČÍSLA) NA DRUHOU STRANU

(2. řádek) DOSAZOVACÍ

$x-2y = 1 \rightarrow x = 1+2y (*)$

$y-4x = 2$

$-x+2x = -5$

$y-4x = 2$

$-(1+2y)+2x = -5$

$y-4x = 2$

$-1-2y+2x = -5$

$y-4x = 2$

$-2y+2x = -4 \quad | :2$

$y-4x = 2$

$-y+x = -2 \quad \textcircled{+}$

$-3x = 0$

$y = 2-4x \quad x = 1+2.2$

$x = 0$

$y = 2$

$x = 5$

$\mathcal{K} = \{[5, 2, 0]\}$

3. řádek MATICOVĚ (ZKRÁCENÝ ZÁPIS GAUS. ELIM. M.)

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & -5 \end{array} \right) \xrightarrow{1. \text{ řádek} + 3. \text{ řádek}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow{2. \text{ řádek} \cdot 2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow{2. \text{ řádek} + 3. \text{ řádek}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array} \right)$

$x-2y = 1$

$x-4 = 1$

$x = 5$

$y-4x = 2$

$y = 2$

$-3x = 0$

$x = 0$

$\mathcal{K} = \{[5, 2, 0]\}$

⑤ Řešiv v $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

4.29 a) $4x + y + 2z = 2$

dosaz. $2y - z = 1 \Rightarrow 2y = 1 + z$
 $z = 4$
 $y = \frac{1}{2}(1 + z)$
 $y = 4$

$4x = 2 - y - 2z$

$x = \frac{1}{4}(2 - y - 2z)$

$x = -4$

$\mathcal{K} = \{[-4, 4, 4]\}$

b) $\begin{matrix} x & y & z & = & 1 & \cdot (-1) \\ x & y & z & = & 1 & \cdot (-2) \end{matrix}$
 $x + 2y + 2z = 2$

gaus.
elim.

$2x + 2y + z = 3$

$x + y + z = 1$

$y + z = 1 - 1 \cdot (-1) = 2$

$-z = 1 - 2 \cdot (-1) = 1 \Rightarrow z = -1$

$\Rightarrow x = 1 - y - z$

$x = 1 - 2 - (-1)$

$x = 1 - 2 + 1$

$x = 0$

$\mathcal{K} = \{[0, 2, -1]\}$

c) $x - y + z = 2$ $\begin{matrix} 1. \cdot (-1) \\ 1. \cdot (-6) \end{matrix}$

$x + 2y - 2z = 3$

$6x - 3y + 3z = 14$

$x - y + z = 2$

$3y - 3z = 1$

$3y - 3z = 2$

$\left. \begin{matrix} 3y - 3z = 1 \\ 3y - 3z = 2 \end{matrix} \right\} \text{mluv} \\ \text{SPOR} \quad \mathcal{K} = \emptyset$

d) $x - y + 2z = 2$

$x + 2y - 2z = 3$

$6x - 3y + 8z = 13$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 2 \\ 1 & 2 & -2 & | & 3 \\ 6 & -3 & 8 & | & 13 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 2 \\ 0 & 3 & -4 & | & 1 \\ 0 & 3 & -4 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 2 \\ 0 & 3 & -4 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$

2. stupň $\Rightarrow$ 1. rovnice

2. a 3. rovnice
- 1 rovnice

$\mathcal{K} \in \mathbb{R}$

$\mathcal{K} = \left\{ \left[\frac{2}{3} - \frac{4}{3}z, \frac{4}{3} + \frac{4}{3}z, z \right], z \in \mathbb{R} \right\}$

$x = 2 + y - 2z$

$x = 2 + \frac{4}{3} + \frac{4}{3}z - 2z$

$x = \frac{10}{3} - \frac{2}{3}z$

$3y = 1 + 4z$
 $y = \frac{1}{3} + \frac{4}{3}z$

ŘEŠTE NA ZVLÁŠTNÍ LIST, KLEPTE SI (NEBO POROZUMTE V SEBĚ)

e) $2x + 3y = 2$

$3x + 2z = 1$

$3y + 4z = 2$

$\mathcal{K} = \left\{ \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{8} \right] \right\}$

f) $5x + 5y + z = 2$

$3x + 4y - 3z = 1$

$-2x - y - 4z = 0$

$\mathcal{K} = \emptyset$

g) x

h) $-2x + y + 4z = -2$

$x - 2y - 2z = 0$

$x + y - 2z = 2$

$\mathcal{K} = \left\{ \left[\frac{4}{3} - 2z, \frac{4}{3}, z \right], z \in \mathbb{R} \right\}$

⑥ Řešiv v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

a) $3x + y - 2z = 2$

$-2x + 3y + z = 2$

$3x - 2y + z = 2$

$\mathcal{K} = \{[1, 1, 1]\}$

b) $x + 2y + z = 4$

$3x - 5y + 3z = 1$

$2x + 7y - z = 8$

$\mathcal{K} = \{[1, 1, 1]\}$

⑦ Řešiv v $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ Gaus. elimin. metodou (má 4 rovnice, 4 neznámé)

4.31 a) $x + y + z + u = 10$

$x + y - z - u = -4$

$x - y - z + u = 0$

$-x + y + z + u = 8$

$\mathcal{K} = \{[1, 2, 3, 4]\}$

[mluv. 1. rovnice, 2. rovnice, 3. rovnice, 4. rovnice]

b) $x - 2z + u = 3$

$2x - y + z = 5$

$x - y - 2z = 1$

$2y + z - u = -3$

- pouze na proměnné - neznámé

$\mathcal{K} = \{[4, -1, 0, 1]\}$